Title	單純且ツ準単純ナLie環ノ表現ノ reduction ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 153 p.56-p.60
Issue Date	1938-02-15
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74605
rights	
Note	

679. 單純且ツ準單純ナ *Lie* 環ノ表現ノ *reduction* ニ就テ

吉田　耕作（阪大）

群 $\mathfrak{g}$ ノ二ツノ表現[1] $\mathfrak{A} : g \longrightarrow A_g$, $\mathfrak{B} : g \longrightarrow B_g$

---

(1) 簡單ノタメニ複素數体ニ於ケル表現ノミヲ考ヘル。

ガ與ヘラレ且ツ $\mathfrak{A}$ ガ irreducible トスル。表現論ニ於ケル大切ナ問題ノ一ツトシテ、$\mathfrak{L}$ ガ $\mathfrak{A}$ ニ equivalent ナ表現ヲ其ノ irreducible ナ components トシテ含ム multiplicity ヲ求ムルコトハ

i) bounded representations ノミヲ取扱ツテ居ルトキニハ J. von Neumann ノ概週期函數ノ理論ニヨリ、又

ii) $\mathfrak{G}$ ガ準單純ナ Lie 群デ、連續ナ表現ノミヲ取扱ツテ居ルトキニハ，H. Weyl ノ unitarian trick ニヨリ

何レモ integral-mean ノ方法ニヨツテ理論的ニハ完全ニ解決サレテ居ル。

Lie 群ノ連續表現ノミヲ取扱フ時ニハ —— 少クトモ準單純ナ Lie 群ノ場合ニハ —— infinitesimal operators ヲ用フル —— differential method ガアツテモヨサ相デアル。以下ニハ單純且ツ準單純ナ Lie 環 $\mathfrak{R}$ ノ表現ノ場合ノ一ツノ方法ヲ示シタイ。R. Brauer ノ論文（Math. Ann. 41, 3 (1936) p. 330—）ヘノ一ツノ remark デアリマス。

$\mathfrak{R}$ ノ infinitesimal operators ノ base ヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_r$ トスル：

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} X_k .$$

準單純ト云フコトハ

$$\det\|g_{ij}\| \neq 0, \quad g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{r} C_{ilk} C_{jkl}$$

ト同等デアル。

表現 $\mathfrak{A}: X_i \longrightarrow A_i$ ノ Grad ヲ n，表現 $\mathfrak{B}: X_i \longrightarrow B_i$ ノ Grad ヲ m トスル。表現ト云フノハ上ノ對應が

$$X_i + X_j \longrightarrow A_i + A_j,$$
$$[X_i, X_j] \longrightarrow [A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$$
$$\alpha X_i \longrightarrow \alpha A_i \quad (\alpha \text{ ハ複素數})$$

ナル如クナツテ居ルコトヲ意味スル。

Zero-representation（各 X_i = Zero-matrix ヲ對應サセル trivial representation）ヲ考ヘナイコトニスレバ；$\mathfrak{R}$ が單純ト云フコトカラ $\mathfrak{A}$ モ $\mathfrak{B}$ モ $\mathfrak{R}$ ニ同型デアル。A_i ノ transposed matrix A'_i ニ -1 ヲ乘ジタモノヲ A_i^* ト書ケバ $X_i \longrightarrow A_i^*$ モ亦 $\mathfrak{R}$ ノ表現ヲ與ヘル。之ヲ $\mathfrak{A}^*$ ト書ク。

定理。$\mathfrak{A}$ が irreducible ナトキ $\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}$ ノ irreducible component トシテ含マレル multiplicity ハ行列

$$(1) \quad \sum_{i,j=1}^{r} g^{ij}\{A_i^* \times E_m + E_n \times B_i\}\{A_j^* \times E_m + E_n \times B_j\}$$

$\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}$ ノ表現空間ノ Produktraum ノ vectors ヲ定メタ順序ニ並ベテ選イダトキノ Produkt.

ノ Eigenwert zero ノ multiplicity ニ等シイ。

コヽニ

$$\| g^{ij} \| = \| g_{ij} \|^{-1}.$$

又 X ハ Produktmatrix ヲ意味スル。[1] E_k ナ k 次単位行列.

証明. $C_i = A_i \times E_m + E_n \times B_i$ ト置ケバ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ト共ニ $\mathfrak{C}: X_i \longrightarrow C_i$ ガ亦 $\mathfrak{R}$ ノ表現ニナッテ居ル。$\mathfrak{R}$ ガ準単純ダカラ $\mathfrak{C}$ ハ completely reducible (H. Weyl ノ定理).[1] ヨッテ Brauer ノ Hilfssatz カラ直グワカル如ク問題ノ multiplicity ナ表現 $\mathfrak{C}$ ガ trivial representation $X_i \longrightarrow 0$ ヲ irreducible component トシテ含ム multiplicity ニ一致スル。此ノ multiplicity ヲ k トシ $\mathfrak{C}$ ヲ equivalent ナ

$$\begin{array}{c} k\text{コ}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \end{array} \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & \ddots\; 0 & & & \\ & & & \alpha_1 & & \\ & & & & \alpha_2 & \\ & & & & & \ddots\; \alpha_s \end{array} \right\|$$

ニ transform スル。コヽニ $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_s$ ハ trivial

---

(1) Brauer ノ論文ハ実ハ準単純ナ Lie 環ノ表現ノ c.r. ノ algebraic proop ヲ目的トシタモノデアッタ —— Weyl ノ証明ハ unitarian trick ニヨル積分ノ方法ヲ用ヒル。

デナイ $\mathfrak{O}$ ノ irreducible components.

$\mathfrak{A}_t : X_i \longrightarrow A_{it}$ (Grad t) トスレバ (1) ハ

$$k\text{コ}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right.\left\|\begin{array}{ccccccc} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & M_1 & & \\ & & & & & M_2 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & M_s \end{array}\right\|$$

ト ähnlich. $\quad M_t = \sum_{i,j=1}^{\nu} g^{ij} A_{it} A_{jt}$。

所ガ $\mathfrak{A}_t$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ同型、従ッテ $\mathfrak{R}$ ト同ジ g^{ij} ヲモツコトト irreducibility カラ同ジク Brauer ノ Hilfssatz ニヨリ $M_t = \alpha_t E_t$ (E_t ハ t 次単位行列) $\alpha_t > 0$。

—— 以上 ——